13 februarie 2016

Olimpiada raională/municipală la matematică

Clasa a XI-a

Soluţii

Problema 11.1.

Deoarece progresia aritmetică este crescătoare, rezultă că raţia progresiei este pozitivă. Fie r raţia progresiei aritmetice, iar x al doilea termen al progresiei, atunci primul termen va fi $x-r$, iar al treilea termen $x+r$. Conform enunţului avem $x-r+x+x+r=15 \Leftrightarrow 3x=15$, de unde $x=5$, deci al doilea termen al progresiei aritmetice este egal cu 5. Aşadar, cele trei numere sunt $5-r$, 5, $5+r$. Numerele $4-r$, 4, $6+r$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice. Folosind proprietatea caracteristică a progresiei geometrice obţinem $(4-r)(6+r)=16$, de unde $r_1=-4$, $r_2=2$. Deoarece $r>0$, rezultă că $r=2$. Atunci cele trei numere iniţiale sunt 3, 5, 7.

Răspuns: 3, 5, 7.

Problema 11.2.

Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, $BC=2\sqrt{13}\,cm$, BM este mediană corespunzătoare laturii AC, $M\in[AC]$, $BM=5cm$. Fie $AC=2x \Rightarrow AM=MC=x$. Din triunghiul dreptunghic ABC, conform teoremei lui Pitagora avem $AB^2=BC^2-AC^2=\left(2\sqrt{13}\right)^2-(2x)^2=52-4x^2$. Din triunghiul dreptunghic ABM, conform teoremei lui Pitagora avem $AB^2=BM^2-AM^2=25-x^2$. Obţinem $25-x^2=52-4x^2 \Leftrightarrow 3x^2=27 \Leftrightarrow x^2=9$, de unde $x_1=-3$ (nu convine) şi $x_2=3$. Atunci $AC=6cm$ şi $AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{52-36}=4cm$. Aria triunghiului ABC va fi $A=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4=12cm^2$.

Răspuns: $A_{ABC}=12cm^2$.

Problema 11.3.

Folosim identitatea $\frac{2}{k(k+2)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}$ şi obţinem

$$E=\frac{2}{a(a+2)}+\frac{2}{(a+2)(a+4)}+\frac{2}{(a+4)(a+6)}+\ldots+\frac{2}{(a+2014)(a+2016)}=$$

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+4}+\frac{1}{a+4}-\frac{1}{a+6}+\ldots+\frac{1}{a+2012}-\frac{1}{a+2014}+\frac{1}{a+2014}-\frac{1}{a+2016}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+2016}=$$

$$\frac{a+2016-a}{a(a+2016)}=\frac{2016}{a^2+2016a}.$$

Răspuns: $E=\frac{2016}{a^2+2016a}$.

Problema 11.4.

Fie $AM=x$, atunci $AB=x$ şi $BM=2x$. Folosind relaţia $MC^2=AM\cdot MB$ obţinem $2x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{2}$, deci $AM=AB=\sqrt{2}\,cm$. Folosind teorema cosinusurilor în triunghiul AMC avem

$$AC^2=MA^2+MC^2-2\cdot AM\cdot MC\cdot\cos 45^\circ \Rightarrow AC^2=2+4-2\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AC^2=2 \Rightarrow AC=\sqrt{2}\,cm.$$

Deoarece în triunghiul AMC avem $MC^2=AC^2+AM^2$, atunci conform reciprocei teotemei lui Pitagora rezultă că triunghiul AMC este dreptunghic cu $m(\angle CAM)=90^\circ$. Atunci şi triunghiul CAB este dreptunghic cu $m(\angle CAB)=90^\circ$, şi deoarece $AC=AB=\sqrt{2}\,cm \Rightarrow$ triunghiul CAB este dreptunghic isoscel, şi fiind înscris în cerc $\Rightarrow [BC]$ este diametru al cercului. Atunci $BC=2cm$, de unde $R=1cm$.

Răspuns: $R=1cm$.

Problema 11.5.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-tgx}{x^2\sin x}$. Avem nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$. Atunci $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-tgx}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}{x^2\cdot\sin x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\cdot\sin x-\sin x}{x^2\cdot\sin x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\cos^2 x-1\right)}{x^2\cdot\sin x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x^2\cdot\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=-1\cdot 1=-1.$$

Răspuns: -1.

13 februarie 2016

Olimpiada raională/municipală la matematică

Clasa a XI-a

Barem de corectare

NOTĂ: *Oricare altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctajul maxim.*

Problema	Scor maxim	Răspuns corect	Etapele rezolvării	Punctaj acordat	Observații
11.1.	7 p.	3, 5, 7	- deduce că raţia progresiei este număr pozitiv - determinarea termenului al doilea al progresiei aritmetice - scrierea celor trei numere care formează progresia geometrică - utilizarea proprietății caracteristice progresiei geometrice - calcularea raţiei progresiei geometrice - determinarea numerelor inițiale 3, 5, 7	1 p. 1 p. 1 p. 2 p. 1 p. 1 p.	
11.2.	7 p.	$A_{ABC}=12cm^2$	- efectuarea corectă a desenului - exprimarea pătratului lungimii laturii *AB* din triunghiul *ABC* - exprimarea pătratului lungimii laturii *AB* din triunghiul *ABM* - obţinerea ecuaţiei $25-x^2=52-4x^2$ şi rezolvarea ei - calcularea lungimii unei catete - calcularea lungimii catetei a doua - calcularea ariei triunghiului $A_{ABC}=12cm^2$	1 p. 1 p. 1 p. 1 p. 1 p. 1 p. 1 p.	
11.3.	7 p.	$E=\frac{2016}{a^2+2016a}$	- determinarea corectă a identității care la aplicare ne conduce la rezolvarea problemei, $\frac{2}{k(k+2)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}$ - utilizarea identității $\frac{2}{k(k+2)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}$ - calcularea sumei - răspuns corect	3 p. 2 p. 1 p. 1 p.	
11.4.	7 p.	$R=1cm$	- efectuarea corectă a desenului - utilizarea relaţiei $MC^2=AM\cdot MB$ şi obţinerea $AM=AB=\sqrt{2}\,cm$ - aplicarea teoremei cosinusurilor în triunghiul *AMC* şi calcularea lungimii segmentului $AC=\sqrt{2}\,cm$ - arată că triunghiul *AMC* este dreptunghic - determinarea lungimii razei $R=1cm$	1 p. 2 p. 2 p. 1 p. 1 p.	
11.5.	7 p.	-1	- observă nedeterminarea de forma $\frac{0}{0}$ - efectuarea transformărilor echivalente şi obţinerea $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2\cdot\cos x}$ - obţinerea $-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$ - calcularea $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$ - calcularea $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$ - finalizare	1 p. 2 p. 1 p. 1 p. 1 p. 1 p.	