13 februarie 2016

Olimpiada raională/municipală la matematică

Clasa a IX-a

Soluţii

Problema 9.1. DVA: $x \neq 0, x \neq -1$.

Pe DVA ecuaţia obține forma: $x \cdot |x| + \dfrac{x^3+1}{x+1} - x^0 = 0 \Leftrightarrow x \cdot |x| + x^2 - x + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x \cdot |x| + x^2 - x = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ 2x^2 - x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ -x^2 + x^2 - x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x \in \phi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}.$$

Răspuns: $S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Problema 9.2.

Fracţia cu numărătorul constant şi numitorul variabil primeşte valoare minimă cînd numitorul primeşte valoare maximă. Considerăm funcţia $g : E \to R, g(x) = 59 - x^2 + 4x.$ Deoarece coeficientul superior a, $a = -1 < 0$, funcţia atinge valoarea maximală în $x_v = -\dfrac{b}{2a} = 2$, iar $g_{\max} = g(2) = 59 - 4 + 8 = 63$. Prin urmare $f_{\min} = \dfrac{2016}{63} = 32$.

Răspuns: $f_{\min} = 32$.

Problema 9.3.

Fie numerele naturale consecutive $n, n+1, n+2$. Calculăm

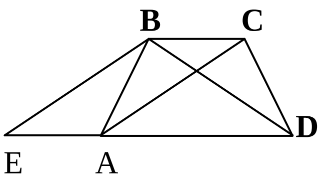
$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 = 3(n^3 + 3n^2 + 5n + 3) = 3(n^3 - n + 3n^2 + 6n + 3) =$

$= 3[(n-1)n(n+1) + 3(n^2 + 2n + 1)].$

Primul termen din paranteză este divizibil cu 3, deoarece reprezintă un produs a trei numere naturale consecutive și al doilea termen evident este divizibil cu 3. Prin urmare, tot produsul, avînd în vedere coeficientul 3, este divizibil cu 9.

Dec, în concluzie, suma cuburilor a trei numere naturale consecutive este divizibilă cu 9. ***c.t.d.***

Problema 9.4.



Construim $BE \parallel CA$ pînă la intersecţie cu prelungirea bazei *AD* în punctul *E*. Triunghiul *EBD* este echivalent cu trapezul ABCD, deoarece au aceiaşi înălţime, iar baza triunghiului este egală cu suma bazelor trapezului. Toate laturile acestui triunghi sînt cunoscute: *EB* = 5 cm, *BD* = 12 cm, *ED* = 6 + 7 = 13 (cm).
După teorema reciprocă a lui Pitagora acest triunghi este dreptunghic în B, deoarece $13^2 = 5^2 + 12^2$.Deci

$A_{EBD} = A_{ABCD} = \dfrac{5 \times 12}{2} = 30(cm^2)$

Răspuns: $A_{tr} = 30\, cm^2$.

Problema 9.5.

Conform relaţiilor lui Viète obţinem: $x_1 + x_2 = -a, \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2a^2}$.

Calculăm: $x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}\right)^2 - (2x_1x_2)^2 = \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - (2x_1x_2)^2 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{4a^4} =$

$= a^4 + 2 + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{2a^4} = a^4 + 2 + \frac{1}{2a^4} = 2 + \left(a^4 + \frac{1}{2a^4}\right) \geq 2 + 2\sqrt{a^4 \cdot \frac{1}{2a^4}} = 2 + \sqrt{2}.$

În concluzie, este demonstrată identitatea.

13 februarie 2016

Olimpiada raională/municipală la matematică

Clasa a IX-a

Barem de corectare

NOTĂ: *Oricare altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctajul maxim.*

Proble ma	Scor maxim	Răspuns corect	Etapele rezolvării	Punctaj acordat	Observaţii
9.1.	7 p.	$S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$	- determinarea DVA - aducerea ecuaţiei la forma $x\cdot\lvert x\rvert+x^2-x=0$ - rezolvarea ecuaţiei $x\cdot\lvert x\rvert+x^2-x=0$ (cazul $x>0$ – 2 p., cazul $x<0$ – 2 p.) - răspuns corect	1 p. 1 p. 4 p. 1 p.	
9.2.	7 p.	$f_{\min}=32$	- argumentarea situaţiei cînd fracţia dată primeşte valoare minimă - selectarea funcţiei $g:E\to R, g(x)=59-x^2+4x$ - studiul funcției, referitor la coeficientul superior $a=-1<0$ concluzia cu privire la valoarea maximă - calcularea abscisei vîrfului $x_v=2$ - determinarea valorii maxime a funcţiei g - calcularea valorii minime a funcţiei f - răspuns corect.	1 p. 1 p. 1 p. 1 p. 1 p. 1 p. 1 p.	
9.3.	7 p.		- utilizarea unei necunoscute auxiliare si scrierea celor 3 numere consecutive - efectuarea transformărilor, şi obţinerea formei $3[(n-1)n(n+1)+3(n^2+2n+1)]$ - argumentarea că fiecare termen al factorului al doilea este divizibil cu 3 (cîte 1 p. pentru fiecare) - concluzia finală	1 p. 3 p. 2 p. 1 p.	sau scrie suma a 2 termeni
9.4.	7 p.	$A_{tr}=30\,cm^2$.	- efectuarea desenului suplimentar, construirea $BE \parallel CA$ pînă la intersecţie cu prelungirea bazei AD în punctul E - argumentarea, că triunghiul EBD este echivalent cu trapezul ABCD - determinarea laturilor triunghiului EBD - calcularea ariei triunghiului EBD - răspuns corect	2 p. 2 p. 1 p. 1 p. 1 p.	În situația, în care elevul utilizează altă metodă care duce spre rezolvare, se elaborează alt barem similar
9.5.	7 p.		- utilizarea relaţiilor lui Viète - efectuarea transformărilor sumei $x_1^4+x_2^4$ $=2+\left(a^4+\frac{1}{2a^4}\right)$ - utilizarea inegalităţii mediilor - concluzie finală	1 p. 3 p. 2 p. 1 p.	