13 februarie 2016

Olimpiada raională/municipală la matematică

Clasa a X-a

Soluţii

Problema № 10.1.

Determinaţi termenul ce nu-l conţine pe *x* al dezvoltării binomului $\left(\frac{x+1}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1}-\frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}}\right)^{10}$.

Soluţie:

1) Transformăm termenii binomului, aducându-i la forma standard:

$$\frac{x+1}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1}-\frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}}=\frac{(x^{\frac{1}{3}}+1)(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1)}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1}-\frac{(x^{\frac{1}{2}}-1)(x^{\frac{1}{2}}+1)}{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+1)}=x^{\frac{1}{3}}+1-\frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{2}}}=x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{2}}$$

Deci, avem binomul lui Nevton de forma $\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^{10}$.

2) Calculăm termenul de rang *k*+1:

$$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k=C_{10}^k\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{10-k}\cdot\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^k=C_{10}^k\cdot x^{\frac{10-k}{3}}\cdot x^{-\frac{k}{2}}=C_{10}^k\cdot x^{\frac{20-5k}{6}}\Rightarrow T_{k+1}=C_{10}^k\cdot x^{\frac{20-5k}{6}}$$

Din ipoteză avem $C_{10}^k\cdot x^{\frac{20-5k}{6}}=C_{10}^k\cdot x^0$, de unde obţinem: $x^{\frac{20-5k}{6}}=x^0\Rightarrow\frac{20-5k}{6}=0\Rightarrow 20-5k=0\Rightarrow$ $k=4$.

3) $k=4\Rightarrow T_{4+1}=T_5=C_{10}^4\cdot x^0=C_{10}^4=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=210\Rightarrow T_5=210$ - termenul ce nu-l conţine pe *x*.

Răspuns: $T_5=210$.

Problema № 10.2.

Determinaţi valorile parametrului real *b*, astfel încât ecuaţiile $2016x^2+bx+6102=0$ şi $6102x^2+bx+2016=0$ admit o singură soluţie comună.

Soluţie:

1) Fie, că $x=\alpha$ este unica soluţie comună a ecuaţiilor date, atunci avem:

$$\begin{cases}6102\cdot\alpha^2+b\cdot\alpha+2016=0\\2016\cdot\alpha^2+b\cdot\alpha+6102=0\end{cases}$$

2) Prin scădere din prima egalitate egalitatea a doua obţinem: $(6012-2016)(\alpha^2-1)=0$.

3) Evident, că $\alpha^2-1=0\Rightarrow\alpha^2-1=0\Rightarrow\alpha=\pm 1$.

4) Pentru $\alpha=-1$ obţinem $2016-b+6102=0$, de unde $b=8118$.

5) Pentru $\alpha=1$ obţinem $2016+b+6102=0$, de unde $b=-8118$.

Răspuns: $b\in\{-8118; 8118\}$

Problema № 10.3.

Aflaţi valorile numărului *a*, astfel încît are loc egalitatea $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c(11a-10)=2$.

Soluţie:

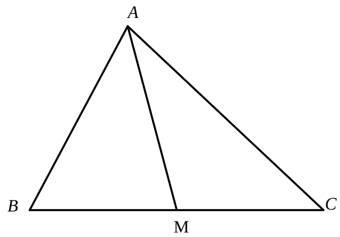
1) Domeniul valorilor admisibile pentru numărul a este: $\begin{cases}a>0\\a\neq 1\\11a-10>0\end{cases}\Rightarrow a\in\left(\frac{10}{11};1\right)\cup(1;+\infty)$.

2) Aplicăm formula de trecere la baza *a* a logaritmilor în bazele *b* şi *c*: $\log_a b\cdot\frac{\log_a c}{\log_a b}\cdot\frac{\log_a(11a-10)}{\log_a c}=2$.

3) După simplificare obţinem: $\log_a(11a-10)=2$, de unde se obţine ecuaţia cu necunoscuta *a*:
$a^2-11a+10=0$.
4) Rezolvînd ecuaţia obţinem: $a_1=1\notin DVA$ şi $a_2=10\in DVA$.

Răspuns: $a=10$.

Problema № 10.4.
În triunghiul ABC, mediana $[AM]$ are lungimea de 3cm. Calculaţi lungimea laturii $[BC]$, dacă $AB=1$cm şi $AC=\sqrt{35}$ cm.
Soluţie:



1) Notăm $BC=x$, unde $x>0$.
2) Conform formulei medianei avem:
$AM=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2(AB^2+AC^2)-BC^2}$, de unde se obţine: $4\cdot AM^2=2(AB^2+AC^2)-BC^2$.
3) Substituind datele şi notaţia în ultima relaţie se obţine ecuaţia: $4\cdot 3^2=2(1^2+(\sqrt{35})^2)-x^2$
Rezolvăm ecuaţia şi obţinem:
$x^2+36=72\Rightarrow x^2=36\Rightarrow x=\pm 6\Rightarrow x=6$, deoarece $x>0$.
4) $x=6\Rightarrow BC=6$cm.

Răspuns: $BC=6$cm.

Problema № 10.5.
Fie dat numărul $x=\sqrt[3]{68-22\sqrt{10}}$.

a) Demonstraţi, că $(2-x)^2\in Q$; **b)** Calculaţi $\lg(2-x)^2$.

Soluţie:
1) Scriem: $x=\sqrt[3]{68-22\sqrt{10}}=a-b\sqrt{10}$, de unde obţinem: $\left(a-b\sqrt{10}\right)^3=68-22\sqrt{10}$
2) Prin ridicare la cub şi grupare se obţine sistemul:
$$\begin{cases}a^3+30ab^2=68\\(3a^2b+10b^3)\sqrt{10}=22\sqrt{10}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^3+30ab^2=68\\3a^2b+10b^3=22\end{cases}.$$
3) Prin metoda probelor se obţine $\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$. Deci, $x=\sqrt[3]{68-22\sqrt{10}}=2-1\cdot\sqrt{10}=2-\sqrt{10}\Rightarrow x=2-\sqrt{10}$.
4) a) Avem $2-x=2-2+\sqrt{10}=\sqrt{10}\Rightarrow(2-x)^2=(\sqrt{10})^2=10\in Q$
b) $\lg(2-x)^2=\lg\left(\sqrt{10}\right)^2=\lg 10=1$

Răspuns: b) $\lg(2-x)^2=1$.

13 februarie 2016

Olimpiada raională/municipală la matematică

Clasa a X-a

Barem de corectare

***NOTĂ:** Oricare altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctajul maxim.*

Proble ma	Scor maxim	Răspuns corect	Etapele rezolvării	Punctaj acordat	Observații
10.1.	7 p.	$T_5 = 210$	- aduce la o forma mai simplă termenii binomului şi obţine binomul $\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^{10}$ sau $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}\right)^{10}$ - determinarea termenului de rang $k+1$: $T_{k+1} = C_{10}^k \cdot x^{\frac{20-5k}{6}}$ - obține egalitatea $C_{10}^k \cdot x^{\frac{20-5k}{6}} = C_{10}^k \cdot x^0$ - determinarea valorii lui k, $k = 4$ - determinarea termenului ce nu-l conţine pe x: $T_5 = 210$	2 p. 2 p. 1 p. 1 p. 1 p.	
10.2.	7 p.	$b \in \{-8118; 8118\}$	- a presupus, că $x = \alpha$ este unica soluţie comună a ecuaţiilor date şi a obţinut sistemul respectiv - obţinerea egalității $(6012 - 2016)(\alpha^2 - 1) = 0$ - determinarea valorii lui a, $\alpha = \pm 1$ - calcularea valorilor lui b (cîte 1 p. pentru fiecare caz)	2 p. 2 p. 1 p. 2 p.	
10.3.	7 p.	$a = 10$	- determinarea DVA al numărului a - utilizarea proprietății de trecere la baza a a logaritmilor în bazele b şi c, scrie condițiile pentru b şi c - obținerea ecuației $\log_a(11a - 10) = 2$ - transformarea ecuației în $a^2 - 11a + 10 = 0$ - rezolvarea ecuaţiei - selectarea soluției și răspuns corect	1 p. 2 p. 1 p. 1 p. 1 p. 1 p.	
10.4.	7 p.	$BC = 6\,\text{cm}$	- introducerea necunoscutei auxiliare $BC = x$, unde $x > 0$ - utilizarea formulei medianei și obține $4 \cdot AM^2 = 2(AB^2 + AC^2) - BC^2$ - obținerea ecuației $4 \cdot 3^2 = 2(1^2 + (\sqrt{35})^2) - x^2$ - rezolvarea ecuației - selectarea corectă a soluției și răspuns corect	1 p. 2 p. 1 p. 2 p. 1 p.	
10.5.	7 p.	$(2 - x)^2 \in Q$ $\lg(2 - x)^2 = 1$	- scrierea numărului x în forma $x = \sqrt[3]{68 - 22\sqrt{10}} = a - b\sqrt{10}$ sau $\left(a - b\sqrt{10}\right)^3 = 68 - 22\sqrt{10}$ - scrierea unui sistem cu două necunoscute, a şi b - determinarea valorilor a şi b - determinarea numărului $x = 2 - \sqrt{10}$ - arată că $(2 - x)^2 \in Q$ - calcularea valorii $\lg(2 - x)^2 = 1$	1 p. 1 p. 2 p. 1 p. 1 p. 1 p.	