13 februarie 2016

Olimpiada raională/municipală la matematică

Clasa a XII-a

Soluţii

Problema 12.1.

Aşa cum $f(-n)=\frac{1}{2^n}$, atunci $f(0)+f(-1)+f(-2)+\ldots+f(-n)+\ldots \quad = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$

Folosind formula pentru suma progresiei geometrice infinit descrescătoare cu primul termen $b_1=1$ şi raţia $q=\frac{1}{2}$ obţinem $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$

Răspuns: $S=2$**.**

Problema 12.2.

Fie cercul $C(O,R)$ şi dreptunghiul $ABCD$ astfel încît $A,B\in C(O,R)$, $C,D\notin C(O,R)$. Punctele M şi N se află pe cerc, astfel încît $M\in(AD)$, $N\in(BC)$. Triunghiul ABN este înscris în cerc, şi fiind dreptunghic, rezultă că $[AN]$ este diametru, deci $AN=\sqrt{10}\,cm$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABN avem $BN=\sqrt{AN^2-AB^2}=\sqrt{10-1}=\sqrt{9}=3cm$. Deci $BN=3cm$. CK este tangentă la cerc, atunci folosim relaţia $CK^2=CN\cdot BC$. Fie $CN=x$, atunci $BC=x+3$ şi obţinem $3^2=x(x+3) \Leftrightarrow x^2+3x-9=0$ cu soluţiile $x_1=\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}$ (nu convine) şi $x=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$ sau $x=\frac{3\sqrt{5}-3}{2}$. Deci $CN=\frac{3\sqrt{5}-3}{2}$, atunci $BC=\frac{3\sqrt{5}-3}{2}+3=\frac{3\sqrt{5}+3}{2}$. Aşadar, $BC=\frac{3\sqrt{5}+3}{2}cm$, deci aria dreptunghiului va fi $A=AB\cdot BC=1\cdot\frac{3\sqrt{5}+3}{2}=\frac{3}{2}\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)cm^2$**.**

Răspuns: $A=\frac{3}{2}\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)cm^2$**.**

Problema 12.3.

Folosind relaţia $\frac{3}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+4}$, obţinem $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\ldots+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}=$

$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{1\cdot4}+\frac{3}{4\cdot7}+\frac{3}{7\cdot10}+\ldots+\frac{3}{(3n+1)(3n+4)}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)=$

$\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{3n+4}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3n+4-1}{3n+4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3n+3}{3n+4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3(n+1)}{3n+4}=\frac{n+1}{3n+4}<\frac{n+2}{3n+4}$.

Răspuns: Inegalitatea este adevărată.

Problema 12.4.

Triunghiurile AOB şi BOC au înălţime comună BE, $E\in AC$. $A_{AOB}=\frac{1}{2}\cdot AO\cdot BE$. $A_{BOC}=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot BE$. Atunci

$\frac{A_{AOB}}{A_{BOC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AO\cdot BE}{\frac{1}{2}\cdot OC\cdot BE}=\frac{AO}{OC} \Rightarrow \frac{AO}{OC}=\frac{4}{12}$ sau $\frac{AO}{OC}=\frac{1}{3}$. La fel triunghiurile AOD şi COD au înălţimea comună DF, $F\in(AC)$. Rezultă că $\frac{A_{AOD}}{A_{COD}}=\frac{AO}{OC} \Rightarrow \frac{A_{AOD}}{A_{COD}}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{A_{AOD}}{6}=\frac{1}{3} \Rightarrow A_{AOD}=2cm^2$.

Răspuns: $A_{AOD}=2cm^2$.

Problema 12.5.

$\int_0^1\left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 e^{2\sqrt{x}}}dx=\int_0^1 2^{\frac{1}{2}\log_2 e^{2\sqrt{x}}}dx=\int_0^1 2^{\log_2\left(e^{2\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}}}dx=\int_0^1 2^{\log_2 e^{\sqrt{x}}}dx=\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$**.** Calculăm integrala nedefinită $\int e^{\sqrt{x}}dx$, aplicînd metoda schimbării de variabilă, apoi integrarea prin părţi.

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} = \int 2te^t dt = 2\int te^t dt = \begin{bmatrix} u = t \\ du = dt \\ dv = e^t dt \\ v = e^t \end{bmatrix} = 2\left(te^t - \int e^t dt\right) = 2\left(te^t - e^t\right) + c =$$

$2\left(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}\right) + c = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) + c$. Obţinem $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right)\Big|_0^1 = 2e(1-1) - 2(0-1) = 2$.

Răspuns: $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx = 2$.

13 februarie 2016

Olimpiada raională/municipală la matematică

Clasa a XII-a

Barem de corectare

NOTĂ: *Oricare altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctajul maxim.*

Problema	Scor maxim	Răspuns corect	Etapele rezolvării	Punctaj acordat	Observaţii
12.1.	7 p.	$S=2$	- arată că $f(-n)=\frac{1}{2^n}$ - obţinerea sumei $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ - aplicarea formulei pentru suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice infinit descrescătoare - calcularea sumei - răspuns corect	1 p. 1 p. 3 p. 1 p. 1 p.	
12.2.	7 p.	$A=\frac{3}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)cm^2$	- efectuarea corectă a desenului - deduce că AN este diametru şi $AN=\sqrt{10}\,cm$ - calcularea lungimii segmentului BN, $BN=3cm$ - utilizarea relației $CK^2=CN\cdot BC$ şi calcularea lungimii segmentului CN, $CN=\frac{3\sqrt{5}-3}{2}cm$ - calcularea lungimii segmentului BC, $BC=\frac{3\sqrt{5}+3}{2}cm$ - calcularea ariei dreptunghiului $A_{ABCD}=\frac{3}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)cm^2$	1 p. 1 p. 1 p. 2 p. 1 p. 1 p.	
12.3.	7 p.	Inegalitatea este adevărată.	- arată că trebuie de aplicat identitatea $\frac{3}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+4}$ - aplicarea identității $\frac{3}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+4}$ - calcularea sumei - răspuns corect	3 p. 2 p. 1 p. 1 p.	
12.4.	7 p.	$A_{AOD}=2cm^2$	- efectuarea corectă a desenului - arată că triunghiurile AOB şi BOC au înălţime comună şi arată că $\frac{AO}{OC}=\frac{1}{3}$ - arată că triunghiurile AOD şi COD au înălţime comună - obţinerea raportului $\frac{A_{AOD}}{A_{COD}}=\frac{1}{3}$ - răspuns corect	1 p. 2 p. 2 p. 1 p. 1 p.	
12.5.	7 p.	2	- aplicarea proprietăţilor radicalilor (puterilor) şi ale logaritmilor şi obţinerea $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$ - utilizarea metodei de schimbare de variabilă - utilizarea metodei integrării prin părţi - calcularea integralei definite	2 p. 2 p. 2 p. 1 p.	