

08 февраля 2014  
Районная/муниципальная олимпиада по математике  
XII класс

Время выполнения – 4 астрономических часа.

**Задача 12.1.** Вычислите неопределенный интеграл  $\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1} dx$ .

**Задача 12.2.** Дана функция  $f : [0; 5] \rightarrow R$ ,  $f(x) = \max(2^x, x^2)$ .

а) Определите функцию  $f$  и постройте её график;

б) Вычислите  $\int_0^5 f(x) dx$ .

**Задача 12.3.** Докажите неравенство  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{12 - x^2 - x^3}} \geq \frac{\pi}{6}$ .

**Задача 12.4.** Решите на множестве  $R \times R \times R$  систему уравнений 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 27 \\ xy + xz + yz = 27 \end{cases}$$
.

**Задача 12.5.** Объём правильного тетраэдра MABC, равен объёму куба, длина диагонали которого равна  $6\sqrt{6}$  см. Вычислите длину ребра тетраэдра.

*Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.*

08 февраля 2014  
Районная/муниципальная олимпиада по математике  
XII класс

Время выполнения – 4 астрономических часа.

**Задача 12.1.** Вычислите неопределенный интеграл  $\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1} dx$ .

**Задача 12.2.** Дана функция  $f : [0; 5] \rightarrow R$ ,  $f(x) = \max(2^x, x^2)$ .

а) Определите функцию  $f$  и постройте её график;

б) Вычислите  $\int_0^5 f(x) dx$ .

**Задача 12.3.** Докажите неравенство  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{12 - x^2 - x^3}} \geq \frac{\pi}{6}$ .

**Задача 12.4.** Решите на множестве  $R \times R \times R$  систему уравнений 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 27 \\ xy + xz + yz = 27 \end{cases}$$
.

**Задача 12.5.** Объём правильного тетраэдра MABC, равен объёму куба, длина диагонали которого равна  $6\sqrt{6}$  см. Вычислите длину ребра тетраэдра.

*Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.*