08 februarie 2014

Olimpiada raională/municipală la matematică

Clasa a XII-a

SOLUŢII

Problema 12.1.

1)Descompunem în factori expresia x^4+x^2+1:

$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right).$

2) Simplificăm fracţia de sub semnul integralei: $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}=\dfrac{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}=(x^2-x+1)$.

3) Calculăm integrala nedefinită: $\displaystyle\int\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}dx=\int(x^2-x+1)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+C$

Răspuns: $\displaystyle\int\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+C$.

Problema 12.2.

a) Explicităm funcţia $f:[0;5]\to R,\ f(x)=\max(2^x,\ x^2)$.

1) Determinăm punctele de intersecţie ale graficelor funcţiilor $y=2^x$ şi $y=x^2$ pe intervalul $[0;5]$, rezolvând sistemul: $\begin{cases}y=2^x\\ y=x^2\\ 0\le x\le 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2^x\\ 2^x=x^2\\ 0\le x\le 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2^x\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=4\end{array}\right.\\ 0\le x\le 5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}\\ \begin{cases}x=4\\ y=16\end{cases}\end{array}\right.$.

2) Construim ambele grafice în acelaşi sistem de coordonate şi determinăm $\max(2^x,\ x^2)$ pe fiecare din intervalele $[0;2]$, $[2;4]$, şi $[4;5]$.

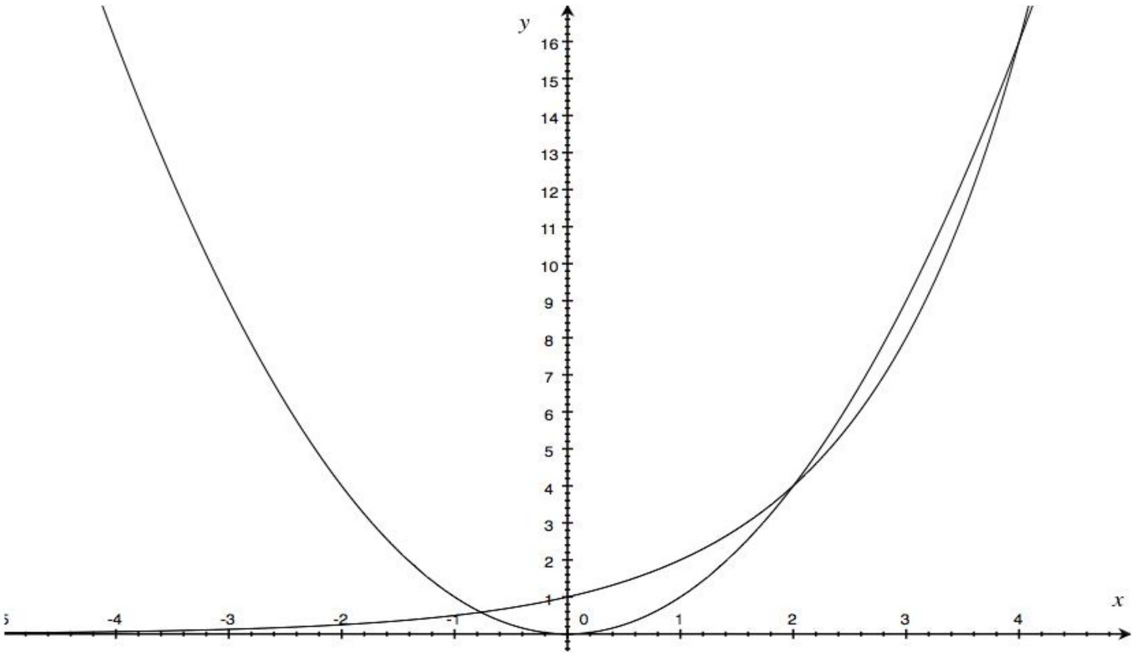
Răspuns: $f:[0;5]\to R,\ f(x)=\begin{cases}2^x,\ pentru\, x\in[0;2]\\ x^2,\ pentru\, x\in[2;4]\\ 2^x,\ pentru\, x\in[4;5]\end{cases}$.

b) Calculăm integrala dată folosind proprietatea (teorema) despre aditivitatea integralei definite a unei funcţii continue pe un interval compact:

$$\int_0^5 f(x)dx=\int_0^2 2^x dx+\int_2^4 x^2dx+\int_4^5 2^x dx=\left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^2+\left.\frac{x^3}{3}\right|_2^4+\left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_4^5=\frac{2^2}{\ln 2}-\frac{2^0}{\ln 2}+\frac{4^3}{3}-\frac{2^3}{3}+\frac{2^5}{\ln 2}-\frac{2^4}{\ln 2}=$$

$$=\frac{4-1+32-16}{\ln 2}+\frac{64-8}{3}=\frac{19}{\ln 2}+\frac{56}{3}=\frac{57+56\ln 2}{\ln 2}.$$

Răspuns: $\dfrac{57+56\ln 2}{\ln 2}$.



Problema 12.3.

1) Observă, că pe intervalul $[0;\sqrt{3}]\subset[0;+\infty)$ au loc inegalităţile echivalente:

$$12-x^2-x^3\le 12-x^2 \Leftrightarrow \sqrt{12-x^2-x^3}\le\sqrt{12-x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{12-x^2-x^3}}\ge\frac{1}{\sqrt{12-x^2}}.$$

2) Integrând ambele părţi ale inegalităţii deduse pe intervalul $[0;\sqrt{3}]$ obţinem:

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{12-x^2-x^3}}\ge\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{12-x^2}}.$$

3) Calculăm membrul drept al inegalităţii:

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{12-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2\sqrt{3}}\bigg|_0^{\sqrt{2}}=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}-\arcsin\frac{0}{2\sqrt{3}}=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=\frac{\pi}{6}$$

4) Concluzie: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{12-x^2-x^3}}\ge\frac{\pi}{6}$.

Problema 12.4.

1) Transformăm sistemul dat, făcând transformări echivalente:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=27\\ xy+xz+yz=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2=xy+xz+yz\\ xy+xz+yz=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+2y^2+2z^2 2xy-2xz-2yz=0\\ xy+xz+yz=27\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0\\ xy+xz+yz=27\end{cases}$$

2) Aplicăm echivalenţa: $a^2+b^2+c^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=0\\ c=0\end{cases}$:

$$\begin{cases}x-y=0\\ x-z=0\\ y-z=0\\ xy+xz+yz=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ x=z\\ y=z\\ xy+xz+yz=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=z\\ xy+xz+yz=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=z\\ 3x^2=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=z\\ x=\pm 3\end{cases}.$$

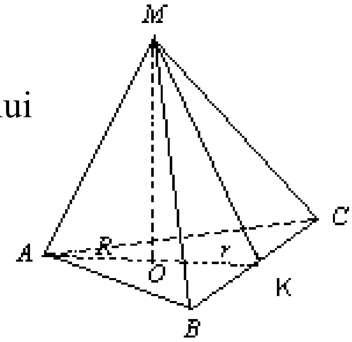
3) Scriem mulţimea soluţiilor sistemului de ecuaţii dat:
$(x;\ y;\ z) \in \{(3;\ 3;\ 3);\ (-3;\ -3;\ -3)\}$

Răspuns: $S = \{(3;\ 3;\ 3);\ (-3;\ -3;\ -3)\}$.

Problema 12.5.

1) (2p.) Din ipoteză volumul tetraedrului este egal cu volumul cubului, adică $V_{tetr} = V_{cub}$.
Fie, că d şi c este lungimea diagonalei şi respectiv lungimea muchiei cubului. Atunci avem
$d = 6\sqrt{6}$ cm şi $d = c\sqrt{3} \Rightarrow c = \dfrac{6\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{2} \Rightarrow c = 6\sqrt{2}$ cm - lungimea muchiei cubului.

$V_{tetr} = V_{cub} = c^3 = \left(6\sqrt{2}\right)^3 = 216 \cdot 2\sqrt{2} = 432\sqrt{2} \Rightarrow V_{tetr} = 432\sqrt{2}$ cm^3.



2) (2p) Deoarece tetraedrul este regulat rezultă, că toate feţele lui sunt triunghiuri echilaterale congruente. Fie $AB = a$ cm, $[MO]$- înălţimea tetraedrului şi $[MK]$ - apotema lui (înălţimea feţei laterale). În ΔABC avem:

$AO = R = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ şi $AK = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

În ΔAOM conform teoremei lui Pitagora avem:

$MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow MO = H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ - tetraedrului regulat.

3) Calculăm volumul tetraedrului regulat cu lungimea muchiei a:

$A_b = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ - aria bazei tetraedrului regulat.

$V_{tetr} = \dfrac{1}{3} \cdot A_b \cdot H = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V_{tetr} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ - volumul tetraedrului regulat.

4) Calculăm lungimea muchiei tetraedrului:

$V_{tetr} = 432\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = 432\sqrt{2} \Rightarrow a^3 = 432 \cdot 12 \Rightarrow a = \sqrt[3]{6^3 \cdot 2^3 \cdot 3} = 12\sqrt[3]{3} \Rightarrow a = 12\sqrt[3]{3}$ cm.

Răspuns: $a = 12\sqrt[3]{3}$ cm.

08 februarie 2014

Olimpiada raională/municipală la matematică

Clasa a XII-a

BAREM DE CORECTARE

NOTĂ: *Oricare altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctajul maxim.*

Problema	Scor maxim	Răspuns corect	Etapele rezolvării	Punctaj acordat	Observaţii
12.1.	7 p.	$\int \frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+C$	- descompunerea numărătorului în produs de factori - simplificarea fracţiei - calcularea integralei nedefinite - răspuns corect	2 p. 2 p. 2 p. 1 p.	
12.2.	7 p.	a) $f:[0;5]\to R,\ f(x)=\begin{cases}2^x,\ pentru\,x\in[0;2]\\x^2,\ pentru\,x\in[2;4]\\2^x,\ pentru\,x\in[4;5]\end{cases}$ b) $\frac{57+56\ln 2}{\ln 2}$	a)- determinarea punctelor de intersecţie ale graficelor funcţiilor - trasarea graficelor funcţiilor - explicitarea funcţiei b) – utilizarea proprietăţii (teoremei) despre aditivitatea integralei definite a unel funcţii continue pe un interval compact - calcularea integralei definite	1 p. 2 p. 1 p. 1 p. 2 p.	Sau arată care funcţie primeşte valori mai mari pe fiecare dintre intervalele obţinute
12.3.	7 p.		- arată că $\frac{1}{\sqrt{12-x^2-x^3}}\geq\frac{1}{\sqrt{12-x^2}}$ - arată că $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{12-x^2-x^3}}\geq\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{12-x^2}}$ - calcularea integralei membrului drept al inegalităţii - efectuarea concluziei	3 p. 1 p. 2 p. 1 p.	
12.4.	7 p.	$S=\{(3;3;3);(-3;-3;-3)\}$	- transformarea sistemului în sistemul echivalent $\begin{cases}(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0\\xy+xz+yz=27\end{cases}$ - utilizarea echivalenţei $a^2+b^2+c^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases}$ - determinarea soluţiilor sistemului de ecuaţii	3 p. 2 p. 2 p.	
12.5.	7 p.	$12\sqrt[3]{3}$ cm	- calcularea lungimii muchiei cubului	2 p.	

			- exprimarea lungimii înălţimii tetraedrului prin lungimea muchiei tetraedrului - calcularea volumului tetraedrului exprimat prin lungimea muchiei - calcularea lungimii muchiei tetraedrului	2 p. 1 p. 2 p.		