08 februarie 2014

Olimpiada raională/municipală la matematică

Clasa a X-a

SOLUŢII

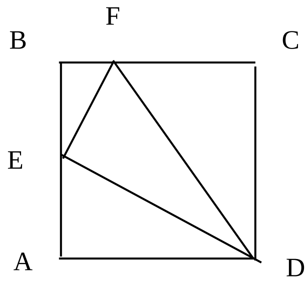
Problema 10.1.

Avem $\log_3 12 = \log_3(3\cdot 4) = \log_3 3 + \log_3 2^2 = 1 + 2\cdot\log_3 2 \Rightarrow a = 1 + 2\cdot\log_3 2 \Rightarrow \log_3 2 = \frac{a-1}{2}$. Atunci

$\log_3 18 = \log_3(2\cdot 9) = \log_3 2 + \log_3 9 = \log_3 2 + 2 = \frac{a-1}{2} + 2 = \frac{a+3}{2}$.

Răspuns: $\log_3 18 = \frac{a+3}{2}$.

Problema 10.2.



a) Fie a - lungimea laturii pătratului. Atunci $AE = BE = \frac{a}{2}$, $BF = \frac{a}{4}$, $FC = \frac{3a}{4}$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic AED, $ED^2 = AD^2 + AE^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic EBF, $EF^2 = EB^2 + FB^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16} = \frac{5a^2}{16}$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic FCD, $FD^2 = FC^2 + CD^2 = \frac{9a^2}{16} + a^2 = \frac{25a^2}{16}$. Aşadar, $EF^2 = \frac{5a^2}{16}$, $ED^2 = \frac{5a^2}{4}$, $FD^2 = \frac{25a^2}{16}$. Deoarece $\frac{25a^2}{16} = \frac{5a^2}{16} + \frac{5a^2}{4} \Rightarrow FD^2 = EF^2 + ED^2$, şi conform reciprocei teoremei lui Pitagora $\Rightarrow \triangle FED$ este dreptunghic în $E \Rightarrow DE \perp EF$.

b) $EF = \frac{a\sqrt{5}}{4}$, $ED = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Atunci $tg(\angle ADE) = \frac{AE}{AD} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$. $tg(\angle FDE) = \frac{EF}{ED} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{4}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}$. Deoarece

$tg(\angle ADE) = tg(\angle FDE) \Rightarrow \angle ADE \equiv \angle FDE$

Răspuns: *a*) $DE \perp EF$, *b*) $\angle ADE \equiv \angle FDE$.

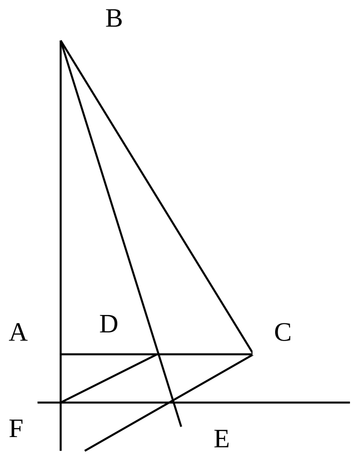
Problema 10.3.

DVA al ecuaţiei: $x \in [0;+\infty]$, $y \in [0;+\infty]$. Avem $x + y + 8 = 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{5y} \Leftrightarrow x + y + 8 = 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{x} + 2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{y}$

$\Leftrightarrow \left(x - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{x} + 3\right) + \left(y - 2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{y} + 5\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{y} - \sqrt{5}\right)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x} - \sqrt{3}\right)^2 = 0 \\ \left(\sqrt{y} - \sqrt{5}\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{y} - \sqrt{5} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$.

Răspuns: $x = 3$, $y = 5$.



Problema 10.4.
$\triangle BFE \equiv \triangle BCE$, ca triunghiuri dreptunghice, conform cazului IU, deoarece $[BE]$ este latură comună şi $\angle FBE \equiv \angle CBE$ $\Rightarrow$ $[FE] \equiv [CE]$ şi $[BF] \equiv [BC]$ $\Rightarrow$ $\triangle BFD \equiv \triangle BCD$ (cazul LUL) $\Rightarrow$ $[FD] \equiv [DC]$. Mai avem $DC \parallel FE$ $\Rightarrow$ $FECD$ este romb.
Răspuns: $FECD$ este romb.

Problema 10.5.
Conform inegalităţii mediilor avem: $x+2 \geq 2\sqrt{2x}$, $2y+3 \geq 2\sqrt{6y}$, $3z+4 \geq 2\sqrt{12z}$. Înmulţind ultimele trei inegalităţi membru cu membru, obţinem: $(x+2)(2y+3)(3z+4) \geq 2\sqrt{2x} \cdot 2\sqrt{6y} \cdot 2\sqrt{12z}$ $\Leftrightarrow$ $(x+2)(2y+3)(3z+4) \geq 8\sqrt{144xyz}$ $\Leftrightarrow$ $(x+2)(2y+3)(3z+4) \geq 96\sqrt{xyz}$.
Răspuns: $(x+2)(2y+3)(3z+4) \geq 96\sqrt{xyz}$.

08 februarie 2014

Olimpiada raională/municipală la matematică

Clasa a X-a

BAREM DE CORECTARE

NOTĂ: *Oricare altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctajul maxim.*

Problema	Scor maxim	Răspuns corect	Etapele rezolvării	Punctaj acordat	Observaţii
10.1.	7 p.	$\log_3 18 = \frac{a+3}{2}$	- Arată că $\log_3 12 = 1 + 2\cdot\log_3 2$ - exprimarea $\log_3 2$, $\log_3 2 = \frac{a-1}{2}$ - exprimarea $\log_3 18$, $\log_3 18 = \log_3 2 + 2$ - răspuns corect $\log_3 18 = \frac{a+3}{2}$	2 p. 2 p. 2 p. 1 p.	
10.2.	7 p.		- introducerea necunoscutei auxiliare $AE = BE = \frac{a}{2}$, $BF = \frac{a}{4}$, $FC = \frac{3a}{4}$ - aplicarea teoremei lui Pitagora în cele trei triunghiuri dreptunghice (cîte 1 p. pentru fiecare) - aplicarea reciprocei teoremei lui Pitagora în triunghiul FED - calcularea $tg(\angle ADE)$ şi $tg(\angle FDE)$ - deduce că $\angle ADE \equiv \angle FDE$	1 p. 3 p. 1 p. 1 p. 1 p.	
10.3.	7 p.	$x=3,\ y=5$	-transformarea ecuației în suma a două pătrate perfecte (cîte 2 p. pentru fiecare pătrat perfect) - transformarea ecuației într-un sistem de două ecuații $\begin{cases}\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)^2=0\\ \left(\sqrt{y}-\sqrt{5}\right)^2=0\end{cases}$ - rezolvarea sistemului - răspuns corect	4 p. 1 p. 1 p. 1 p.	
10.4.	7 p.		- Arată că triunghiurile BFE și BCE sunt congruente - deduce că $[FE]\equiv[CE]$ și $[BF]\equiv[BC]$ - deduce congruența triunghiurilor BFD și BCD - arată că $[FD]\equiv[DC]$ - arată că DC și FE sunt paralele - concluzia finală	2 p. 1 p. 1 p. 1 p. 1 p. 1 p.	
10.5.	7 p.		-utilizarea inegalității mediilor pentru fiecare factor (cîte 1 p. pentru fiecare)	3 p.	

			- efectuarea produsului membrilor inegalităților - efectuarea transformărilor identice - concluzie finală	1 p. 2 p. 1 p.	