08 februarie 2014

Olimpiada raională/municipală la matematică

Clasa a XI-a

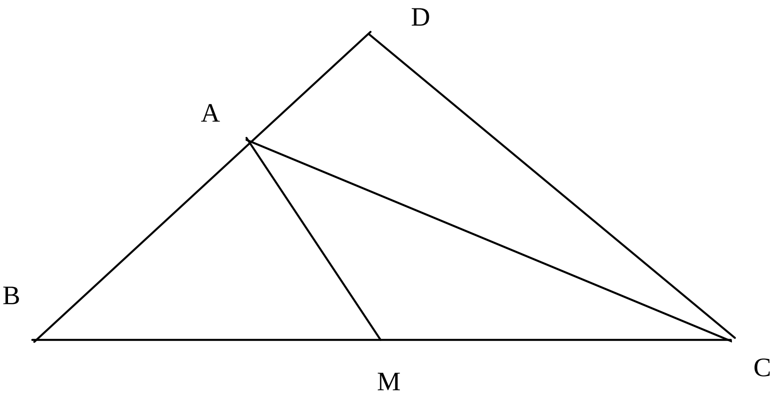
SOLUŢII

Problema 11.1.

$DVA: x\neq 0, y\neq 0$. Relaţia din enunţ se scrie: $\frac{x^2+9y^2}{2xy}+9\cdot\frac{2xy}{x^2+9y^2}=6$. Fie $\frac{x^2+9y^2}{2xy}=t \Rightarrow t+\frac{9}{t}-6=0 \Leftrightarrow$ $t^2-6t+9=0$, de unde $t=3$. Obţinem $\frac{x^2+9y^2}{2xy}=3 \Leftrightarrow x^2+9y^2=6xy \Leftrightarrow x^2-6xy+9y^2=0 \Leftrightarrow (x-3y)^2=0$ $\Rightarrow x=3y$, sau $y=\frac{x}{3}$. Înlocuind în $(x-7)^2+3xy$, obţinem $(x-7)^2+x^2=x^2-14x+49+x^2=2x^2-14x+49$. Valoarea minimă a trinomului $2x^2-14x+49$ se obţine pentru $x=-\frac{b}{2a}=\frac{14}{4}=3{,}5$. Valoarea minimă este $2\cdot 3{,}5^2-14\cdot 3{,}5+49=24{,}5$

Răspuns: Valoarea minimă este $24{,}5$.

Problema 11.2.



a) Fie $CD\perp AB$, $D\in AB$ şi $CD=x$. În triunghiul freptunghic BCD, $m(\angle B)=30^\circ$, deci $BC=2x$. $m(\angle BCD)=60^\circ$, $m(\angle BCA)=15^\circ \Rightarrow m(\angle ACD)=45^\circ$, deci triunghiul ACD este dreptunghic isoscel $\Rightarrow AD=CD=x \Rightarrow$ $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{x^2+x^2}=x\sqrt{2}$.

Atunci $\frac{BC}{AC}=\frac{2x}{x\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

b) Conform punctului *a*) rezultă

$\frac{MC}{AC}=\frac{x}{x\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ □ACM □□$BCA \Rightarrow \frac{MC}{AC}=\frac{AC}{BC}=\frac{AM}{AB} \Rightarrow AM=\frac{AB\cdot AC}{BC}$.

Răspuns: *a*) $\frac{BC}{AC}=\sqrt{2}$; *b*) $AM=\frac{AB\cdot AC}{BC}$.

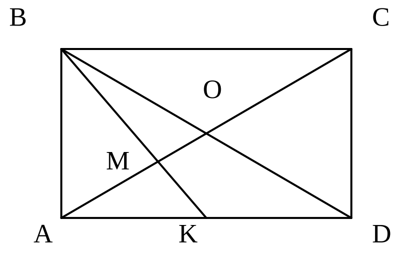
Problema 11.3.

Folosind inegalitatea mediilor, obţinem: $\sqrt{ab+ac}=\sqrt{a(b+c)}\leq\frac{a+b+c}{2}=1007$, $\sqrt{ab+bc}=\sqrt{b(a+c)}\leq\frac{a+b+c}{2}=1007$, $\sqrt{ac+bc}=\sqrt{c(a+b)}\leq\frac{a+b+c}{2}=1007$. Deci $\sqrt{ab+ac}\leq 1007$, $\sqrt{ab+bc}\leq 1007$, $\sqrt{ac+bc}\leq 1007$. Adunînd ultimele trei inegalităţi membru cu membru, obţinem $\sqrt{ab+ac}+\sqrt{ab+bc}+\sqrt{ac+bc}\leq 3021$.

Răspuns: $\sqrt{ab+ac}+\sqrt{ab+bc}+\sqrt{ac+bc}\leq 3021$.

Problema 11.4.

Fie $AC \cap BD = \{O\}$, $AC \cap BK = \{M\}$. Notăm $AB = x$, atunci $AD = x\sqrt{2}$. $[AO]$ şi $[BK]$ sunt mediane în triunghiul $ABD \Rightarrow MK = \frac{1}{3}BK$, $AM = \frac{2}{3}AO$. Atunci



$MK = \frac{1}{3}BK = \frac{1}{3}\sqrt{AB^2 + AK^2} = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3x^2}{2}} = \frac{x}{\sqrt{6}}$.

$AM = \frac{2}{3}AO = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}\sqrt{AD^2 + CD^2} = \frac{1}{3}\sqrt{2x^2 + x^2} = \frac{1}{3}\sqrt{3x^2} = \frac{x}{\sqrt{3}}$. În triunghiul AMK, $AK = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $AM = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $MK = \frac{x}{\sqrt{6}}$. Observăm că $AK^2 = AM^2 + MK^2$, atunci conform reciprocei teoremei lui Pitagora, rezultă că triunghiul AMK este dreptunghic cu ipotenuza $[AK]$, deci $m(\angle AMK) = 90^\circ$.

Răspuns: $m(\angle AMK) = 90^\circ$.

Problema 11.5.

Avem nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^2+2x)-\ln(e^2+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{e^2+2x}{e^2+x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{e^2+2x}{e^2+x}-1\right)}{x} =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{e^2+2x-e^2-x}{e^2+x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e^2+x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e^2+x}\right)}{\frac{x}{e^2+x}\cdot(e^2+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e^2+x}\right)}{\frac{x}{e^2+x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^2+x} = 1\cdot\frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^2}.$$

(S-a folosit limita $\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$). Se poate aplica regula lui L`Hospital.

Răspuns: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^2+2x)-\ln(e^2+x)}{x} = \frac{1}{e^2}$.

08 februarie 2014

Olimpiada raională/municipală la matematică

Clasa a XI-a

BAREM DE CORECTARE

NOTĂ: *Oricare altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctajul maxim.*

Problema	Scor maxim	Răspuns corect	Etapele rezolvării	Punctaj acordat	Observații
11.1.	7 p.	valoarea minimă este $24{,}5$	- scrierea relației $\frac{x^2+9y^2}{2xy}+9\cdot\frac{2xy}{x^2+9y^2}=6$ - scrierea ecuației $t^2-6t+9=0$ - arată că $y=3x$ - determinarea punctul de minim local - calcularea valorii minime	2 p. 1 p. 1 p. 3 p. 1 p.	
11.2.	7 p.	a) $\frac{BC}{AC}=\sqrt{2}$	a)- completarea desenului $CD\perp AB$ - arată că triunghiul ACD este dreptunghic isoscel - calcularea raportului $\frac{BC}{AC}=\sqrt{2}$ b) –arată că triunghiurile ACM și BCA sînt asemenea - deduce egalitatea $AM=\frac{AB\cdot AC}{BC}$	2 p. 1 p. 1 p. 2 p. 1 p.	
11.3.	7 p.		- utilizarea inegalității mediilor (cîte 1 p. pentru fiecare) - transformarea inegalităților obținute - efectuarea operației de adunare a inegalităților obținute membru cu membru - efectuarea concluziei	3 p. 1 p. 2 p. 1 p.	
11.4.	7 p.	$m(\angle AMK)=90^\circ$	- trasarea desenului și efectuarea notațiilor respective conform condiției problemei - arată că $[AO]$ și $[BK]$ sînt mediane în triunghiul ABD - exprimarea lungimilor segmentelor MK și AM prin x - aplicarea reciprocei teoremei lui Pitagora în triunghiul AMK - efectuarea concluziei	1 p. 1 p. 2 p. 2 p. 1 p.	
11.5.	7 p.	$\frac{1}{e^2}$	-determinarea tipului nedeterminării - transformarea $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{e^2+2x}{e^2+x}}{x}$	1 p. 1 p.	

			- obţinerea $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{e^2+x}\right)}{x}$ - obţinerea $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{e^2+x}\right)}{\dfrac{x}{e^2+x}\cdot\left(e^2+x\right)}$ - calcularea limitei	2 p. 1 p. 2 p.	