8 februarie 2014

Olimpiada raională/municipală la matematică

Clasa a VIII-a

SOLUŢII

Problema 8.1.

Din egalitatea $a-b+1=0$ rezultă $a=b-1.$ Calculăm fiecare din cei doi radicali:

$\sqrt{a^2+b^2-2b+1}=\sqrt{a^2+(b-1)^2}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}\,|a|=\sqrt{2}a$, deoarece $a\geq 2$;

$\sqrt{a^2+b^2-4a-6b+13}=\sqrt{(a^2-4a+4)+(b^2-6b+9)}=\sqrt{(a-2)^2+(b-3)^2}=$

$=\sqrt{(a-2)^2+(a-2)^2}=\sqrt{2}\,|a-2|=\sqrt{2}(a-2),$ deoarece $b-3=(b-1)-2=a-2$ şi $a\geq 2.$ Astfel,

$$E=\sqrt{2}a-\sqrt{2}(a-2)=\sqrt{2}(a-a+2)=2\sqrt{2}.$$

Răspuns: $2\sqrt{2}.$

Problema 8.2.

a) Fie n numărul din mijlocul celor 19 numere naturale cerute. Atunci numerele sînt

$$n-9, n-8, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots, n+9.$$

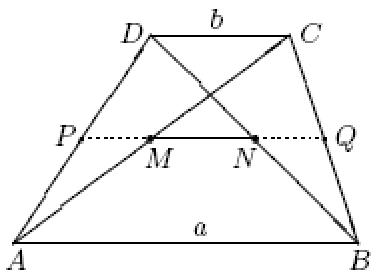
Suma lor va fi 19*n*. Conform condiţiei, $19n=2014,\ n=106.$ Deci, cele 19 numere vor fi 97,98,...,115.

b) Examinăm acum 20 de asemenea numere: $n-9, n-8, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots, n+9, n+10.$ Suma lor va fi $20n+10.$ Conform condiţiei, $20n+10=2014$ şi *n* nu mai este număr întreg. Prin urmare, numărul 2014 nu poate fi scris ca sumă de 20 de numere naturale consecutive.

***Răspuns*:** $2014=97+98+\ldots+115;$ sub forma unei sume de 20 de astfel de numere numărul 2014 nu poate fi scris.

Problema 8.3.

Fie *M* mijlocul diagonalei *AC*, iar *N* mijlocul diagonalei *BD* în trapezul *ABCD* (vezi desenul alăturat). Linia mijlocie *PQ* conţine segmentul *MN*, deci *MN* este paralel cu bazele trapezului.



Cum *PM* e linia mijlocie în $\Delta ACD,$ rezultă $|PM|=\frac{b}{2}.$

Cum *PN* e linia mijlocie în $\Delta ABD,$ rezultă $|PN|=\frac{a}{2}.$

Prin urmare, $MN=PN-PM=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a-b}{2}.$

Răspuns: $\frac{a-b}{2}.$

Problema 8.4.

La fiecare mutare a lui Vlad, Mihai trebuie să mute atîtea cartonaşe, cîte nu ajung pînă la 19. De exemplu, dacă Vlad mută 7 cartonaşe, Mihai mută 12. După ce fiecare elev a făcut cîte 105 mutări, de pe masă s-au luat $105\cdot 19=1995$ de cartonaşe. Au mai rămas

$2014-1995=19$ cartonaşe. Oricîte cartonaşe ar lua acum Vlad de pe masă, mai rămîn nu mai mult de 18, pe care le mută Mihai, cîştigînd astfel jocul.

***Răspuns*:** La fiecare mutare, dacă Vlad ia *k* cartonaşe, Mihai va lua *19-k* cartonaşe.

Problema 8.5. Fie *x* numărul juniorilor dintr-o sală şi *y* numărul seniorilor dintr-o sală. Conform condiţiei,

$$2x+13y=310. \quad (1)$$

Această ecuaţie trebuie rezolvată în numere naturale. Din (1) obţinem $x=\frac{310-13y}{2}=155-6y-\frac{y}{2}.$ Prin urmare, *y* trebuie să fie număr par; fie $y=2n,\ n\in N.$ Atunci $x=155-6\cdot 2n-\frac{2n}{2}=155-13n.$ Astfel, $x=155-13n,\ y=2n$, unde $n\in N$, reprezintă soluţia generală a ecuaţiei (1).

a) Cum $x\in N$ şi $x>0,$ rezultă $155-13n>0,\ n<11\frac{12}{13};\ n\leq 11.$ (2)

b) Conform condiţiei problemei, $x<y,$ adică

$$155-13n<2n \Rightarrow n>\frac{155}{15},\ n>10\frac{5}{15};\ n\geq 11. \ (3)$$

Din (2) şi (3) rezultă $n=11.$ Prin urmare, $x=155-13\cdot 11=12;$ $y=2\cdot 11=22.$ Dar atunci $2x=24,\ 13y=286.$

Răspuns: 24 juniori şi 286 seniori.

8 februarie 2014

Olimpiada raională/municipală la matematică

Clasa a VIII-a

BAREM DE CORECTARE

NOTĂ: Oricare altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctajul maxim.

Problema	Scor maxim	Răspuns corect	Etapele rezolvării	Punctaj acordat	Observaţii
8.1.	7 p.	$2\sqrt{2}.$	- obținerea egalității $a=b-1$ - transformarea expresiei de sub semnul radical ca sumă de două pătrate (cîte 2 p. pentru fiecare radical) - efectuarea transformărilor algebrice - calcularea valorii expresiei E	1 p. 4 p. 1 p. 1 p.	
8.2.	7 p.	$2014=97+98+\ldots+115;$	a)- introducerea unei necunoscute auxiliare și notarea numerelor - calcularea sumei celor 19 numere, exprimată prin necunoscuta auxiliară - scrierea ecuației, rezolvarea ei - determinarea celor 19 numere b) – notarea, calcularea sumei a 20 de numere - argumentarea că asemenea numere nu există	1 p. 1 p. 1 p. 1 p. 2 p. 1 p.	
8.3.	7 p.		-stabilirea că MN este situat pe linia mijlocie a trapezului - calcularea lungimii segmentelor (cîte 2 p. pentru fiecare segment)	1 p. 2 p.	
8.4.	7 p.	La fiecare mutare, dacă Vlad ia *k* cartonaşe, Mihai va lua *19-k* cartonaşe.	-arată că primul pas al lui Mihai este să ia atîtea cartonașe, ca în sumă să fie 19 - arată că după 105 mutări pe masă rămîn 19 cartonașe - concluzia finală	3 p. 2 p. 2 p.	
8.5.	7 p.	24 juniori şi 286 seniori	-introducerea necunoscutelor auxiliare și scrierea ecuației $2x+13y=310$ - exprimarea unei necunoscute prin cealaltă - arată că ecuația are soluții naturale pentru n=11 - determinarea numărului de juniori și seniori	1 p. 1 p. 4 p. 1 p.	