08 februarie 2014

Olimpiada raională/municipală la matematică

Clasa a IX-a

Soluţii

Problema 9.1. DVA: $x \neq -1$.

Pe DVA ecuaţia devine $\sqrt{(x+1)^2} - (x+1)^2 = -2 \Leftrightarrow |x+1| - (x+1)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |x+1|^2 - |x+1| - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x+1| = -1 \\ |x+1| = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \phi \\ x+1 = 2 \\ x+1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in DVA \\ x = -3 \in DVA \end{array}\right.$$

Răspuns: $S = \{-3;1\}$.

Problema 9.2. Utilizînd proprietatea medianei şi teorema lui Pitagora avem consecutiv

$m_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, m_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2, m_c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$. Prin urmare

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2 = \frac{3}{2}c^2.$$

Răspuns: $\frac{3}{2}c^2$.

Problema 9.3. Determinăm pentru ce valori ale lui *p*, ecuaţia admite soluţii reale. $\Delta \geq 0$,

$p \in \left[-\frac{5}{2};\ 1\right]$. Conform relaţiilor lui Viete obţinem: $x_1 + x_2 = -4p, x_1 \cdot x_2 = 6p^2 + 3p - 5$.

Exprimăm prin *p* $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-4p)^2 - 2(6p^2 + 3p - 5) = 4p^2 - 6p + 10 =$

$= 4\left(p - \frac{3}{4}\right)^2 + 7{,}75$. Ultima expresie primeşte cea mai mică valoare pentru $p = \frac{3}{4}$.

Pentru $p = \frac{3}{4}$ ecuaţia într-adevăr are soliţii, deoarece $\frac{3}{4} \in \left[-\frac{5}{2};\ 1\right]$.

Răspuns: $p = \frac{3}{4}$.

Problema 9.4. Aplicînd , consecutiv, inegalitatea mediilor pentru perechile de numere $\left(n, \sqrt{(n+1)\sqrt{n+2}}\right), \left((n+1), \sqrt{n+2}\right)$ şi $(n+2,1)$ se obţine şirul de inegalităţi:

$$\sqrt{n\sqrt{(n+1)\sqrt{n+2}}} < \frac{n + \sqrt{(n+1)\sqrt{n+2}}}{2} < \frac{n + \frac{n+1+\sqrt{n+2}}{2}}{2} = \frac{2n + (n+1) + \sqrt{n+2}}{4} = \frac{3n+1+\sqrt{n+2}}{4} <$$

$$< \frac{3n+1+\frac{n+2+1}{2}}{4} = \frac{7n+5}{8}.$$

Problema 9.5.

Din $a+\frac{1}{a}=-1$ obţinem $\frac{a^2+a+1}{a}=0 \Rightarrow a^2+a+1=0$.

Prin urmare $a^3-1=(a-1)\cdot(a^2+a+1)=0 \Rightarrow a^3=1$. Dar $a^{2014}=a^{2013}\cdot a=\left(a^3\right)^{671}\cdot a=1\cdot a=a$.

Deci $a^{2014}+\frac{1}{a^{2014}}=a+\frac{1}{a}=-1$.

Răspuns: $a^{2014}+\frac{1}{a^{2014}}=-1$.

08 februarie 2014

Olimpiada raională/municipală la matematică

Clasa a IX-a

Barem de corectare

NOTĂ: *Oricare altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctajul maxim.*

Problema	Scor maxim	Răspuns corect	Etapele rezolvării	Punctaj acordat	Observații
1.	7 p.	$S=\{-3;1\}$.	- determinarea corectă a DVA - transformarea ecuaţiei la forma $\lvert x+1\rvert-(x+1)^2+2=0$ - utilizarea relaţiei $a^2=\lvert a\rvert^2$ - rezolvarea ecuaţiei $\lvert x+1\rvert^2-\lvert x+1\rvert-2=0$	1 p. 2 p. 1 p. 3 p.	Sau explicitare a modulului
2.	7 p.	$\frac{3}{2}c^2$	- utilizarea relaţiei $m_c=\frac{c}{2}$ - calcularea pătratului fiecărei mediane (cîte 1 p. pentru fiecare) - calcularea sumei $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{2}c^2$	1 p. 3 p. 3 p.	
3.	7 p.	$p=\frac{3}{4}$	- determinarea valorilor lui *p* pentru care ecuaţia admite soluţii reale - calcularea sumei şi produsului soluţiilor ecuaţiei date - exprimarea $x_1^2+x_2^2=4\left(p-\frac{3}{4}\right)^2+7{,}75$ - determinarea celei mai mici valori (studiul funcţiei de gradul II) - arată că pentru $p=\frac{3}{4}$ ecuaţia admite soluţii reale	1 p. 2 p. 1 p. 2 p. 1 p.	
4.	7 p.		-determinarea perechilor pentru care se utilizează inegalitatea mediilor - utilizarea corectă a inegalităţii mediilor la fiecare pereche (cîte 2 p. pentru fiecare caz)	1 p. 6 p.	
5.	7 p.	$a^{2014}+\frac{1}{a^{2014}}=-1$	- obţinerea expresiei $a^2+a+1=0$ - calcularea $a^3=1$ - exprimarea $a^{2014}=a$ - scrierea răspunsului corect	2 p. 2 p. 2 p. 1 p.	